



Para citar este artículo, le recomendamos el siguiente formato:

Valle Espinosa, M. C., Juárez Ramírez, M. A. y Guzmán Ovando, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 9 (2). Consultado el día de mes de año, en: <http://redie.uabc.mx/vol9no2/contenido-valle.html>

Revista Electrónica de Investigación Educativa

Vol. 9, No. 2, 2007

Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas

General Strategies for the Resolution of Problems in the Mexican Olympic of Mathematics

María del Consuelo Valle Espinosa (1)
chelo_valle@uabc.mx

María Araceli Juárez Ramírez (2)
arjuarez@cfm.buap.mx

María Esperanza Guzmán Ovando (2)
eguzman@cfm.buap.mx

(1) Facultad de Ciencias Marinas
Universidad Autónoma de Baja California

Kilómetro 103 Carretera Tijuana–Ensenada 22800
Ensenada, Baja California, México

(2) Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Av. San Claudio y 18 Sur
Col. San Manuel, Ciudad Universitaria 72570
Puebla, Puebla, México

(Recibido: 4 de agosto de 2006; aceptado para su publicación: 14 de agosto de 2007)

Resumen

En este artículo se reportan las estrategias generales identificadas en la resolución de los problemas planteados en los exámenes de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas para el Estado de Puebla, México. Se analizaron las respuestas de 91 concursantes, procedentes del sistema educativo superior y medio superior del estado de Puebla, cuyas edades fluctuaban entre 14 y 17 años. Sin importar que llegasen a la solución del problema planteado, los concursantes expusieron por escrito sus resultados y fundamentaron sus respuestas en hojas separadas. Con ellas se conformó una base de datos de 546 escritos, entre los que se seleccionaron aquellos donde el concursante hubiera identificado la incógnita, los datos y la condición del problema, y además propusiera una o varias estrategias de solución. Posteriormente, se describió verbalmente la estrategia, se calculó la frecuencia de uso y se observó la incidencia de la estrategia en las ramas de la matemática a las que pertenecen los problemas planteados; se desarrollaron la o las estrategias propuestas por el concursante, identificando las etapas de avance, hasta llegar a la solución completa. Los resultados mostraron que sólo 5 % de los escritos presentaban los problemas con solución completa, lo que evidencia la necesidad de sistematizar los cursos de entrenamiento estatal para la Olimpiada Nacional, cuya importancia radica en su propósito: preparar a los jóvenes para la olimpiada nacional y enriquecer el Sistema de Educación Superior del estado de Puebla con estudiantes interesados en cursar carreras científicas, posibilitados para desarrollar con éxito su razonamiento hipotético–deductivo.

Palabras clave: Matemáticas, resolución de problemas, procesos cognitivos, examen.

Abstract

This article reports the general strategies identified in the resolution of the problems presented in the admission tests of the State Olympic of Math for the State of Puebla, Mexico. The answers of 91 competitors from the higher and medium higher education system were analyzed, whose ages fluctuated between 14 and 17 years. Without giving importance to find the solution of the problem presented, the competitors exposed in writing their results and they supported their answers being separated. With them, a database of 546 writings was created, where it those where the competitor identified the unknown, the data and the condition of the problem was selected, besides the proposition of one or several solution strategies. Subsequently, the strategy was described verbally, the frequency of use was calculated and the incident of the strategy in the different branches of the mathematics that belongs the given problems; the proposed strategy or strategies were developed by the competitor, identifying the phases of progress, until arriving to the complete solution. The results showed that only 5% of the writings presented the problems with complete solution, what evidence the need to systematize the courses of state training for the National Olympic, which importance situates in its purpose: to prepare the youths for the contest and to enrich the System of Higher Education on the state of Puebla with students interested in studying scientific careers, enabled to develop their hypothetical–deductive reasoning with success.

Key words: Mathematics, problem solving, cognitive processes, testing.

Introducción

Los principales objetivos de los planes y programas de estudio de educación básica hasta superior, plantean la necesidad de conocer la forma en que los estudiantes aplican el conocimiento adquirido en diversos contextos a través de la resolución de problemas. Es por eso que en la organización de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática e independientemente de los estilos y/o enfoques utilizados, la resolución de problemas es una actividad importante (Alarcón, Arriaga, Bonilla y Rosas, 1994).

Uno de los autores clásicos sobre los métodos que conducen a la solución de problemas en matemática fue George Pólya. Este autor se basó en su experiencia como matemático al resolver problemas, para sugerir la existencia de etapas generales en este proceso. Sus aportaciones incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven el acercamiento al conocimiento y el desarrollo de estrategias para la solución de problemas.

Pólya, en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, sugiere seguir cuatro pasos para apoyar a los estudiantes que se proponen resolver problemas matemáticos:

Primero, tenemos que comprender el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, tenemos que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Tercero, poner en ejecución el plan. Cuarto, ver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla (1981, p. 28).

En los últimos 30 años, profesores de matemáticas y matemáticos investigaron las operaciones mentales utilizadas como ejes rectores de los procesos que permiten solucionar problemas matemáticos. Estos resultados enriquecen la investigación multidisciplinaria, donde en forma conjunta, especialistas en lingüística, psicología, neuropsicología generan nuevos puntos de vista sobre los procesos de razonamiento matemático (Davis, 1986).

Existen tres enfoques importantes en la investigación de los procesos de resolución de problemas (Santos Trigo, 1996):

- Investigación de la naturaleza de los problemas matemáticos a resolver.
- Caracterización de los estudiantes que resuelven problemas.
- Caracterización de los ambientes de aprendizaje que permiten que los estudiantes solucionen problemas de manera exitosa.

Para este autor, las cuatro variables importantes identificadas en el proceso de resolución de problemas son:

- La importancia de ideas conocidas, conocimientos de conceptos, de hechos específicos, el "saber qué hacer".

- El repertorio de estrategias generales y específicas que son capaces de poner en marcha al sujeto en el camino de la resolución de problemas concretos, el “¿cómo hacerlo?”
- El papel del monitoreo o autoevaluación del procedimiento utilizado al resolver un problema. ¿Es correcto lo que hice?, ¿existe otra vía?
- La influencia de los componentes individuales y afectivos de la persona que resuelve el problema.

Para llevar a cabo este análisis es necesario recurrir a diversos métodos de recolección de información. Algunos de ellos tienen como metas identificar patrones, categorías o dimensiones de las estrategias de solución utilizadas por expertos con experiencia en la resolución de problemas (Santos Trigo, 1997).

Muchos expertos afirman que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo muchos problemas. Las personas hábiles en la resolución de problemas dedican mucho tiempo a esta actividad, es por esto que algunas investigaciones centradas en la observación de expertos, identificaron algunos componentes esenciales que influyen en la resolución de ciertas tareas o problemas (Rich, 1983).

Una fuente importante de información sobre la forma en que las personas resuelven problemas matemáticos, es el contacto o la cercanía con estudiantes con una natural inclinación y gusto por esta ciencia. En 2005, con motivo de la Olimpiada Estatal de Matemáticas para el estado de Puebla, México, se conformó un equipo de investigación cuyo propósito era analizar la forma en que los estudiantes preuniversitarios sobresalientes en matemática resolvían problemas.

El objetivo era identificar estrategias generales en la resolución de los problemas planteados en los exámenes de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas para el estado de Puebla.

I. Método

Los participantes fueron 91 estudiantes en edades entre los 14 y 17 años, procedentes del sistema de educación superior y medio superior (tercero de secundaria y primero o segundo de bachillerato) del estado de Puebla que presentaron el examen de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas del estado de Puebla, el 3 y 4 de junio de 2005.

La investigación inició con el análisis de las respuestas que estos 91 concursantes presentaron en el examen de selección. Las preguntas se observan en la Tabla I. El examen aborda tres ramas de la matemática: Aritmética, Geometría y Combinatoria, y contiene seis preguntas para resolver en dos días.

Tabla I. Problemas del examen de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas del Estado de Puebla

Etiqueta	Pregunta	Rama de la matemática
Primer día		
P1	Cada uno de los lados de un <i>pentágono convexo</i> se divide en 7 partes. ¿Cuántos triángulos se pueden construir usando 3 de estos <i>puntos de división</i> como vértices?	Combinatoria
P2	Encuentra los números naturales de la <i>forma mnpq</i> cuyos dígitos son distintos de cero, para los cuales se cumple la igualdad : ... $mnpq = m^m + n^n + p^p + q^q$	Aritmética
P3	Un cuadrilátero ABCD está <i>inscrita</i> en una circunferencia de radio 12. Sea P el punto de intersección de las <i>diagonales</i> de él. Si $AB = BD$, $AC = 24$ y $CP = 3$, obtén la <i>distancia</i> de AD al <i>centro</i> de dicha circunferencia.	Geometría
Segundo día		
P4	Demuestra que si m es un número par, $m^3 + 3m^2 + 2m$ es un múltiplo de 24.	Aritmética
P5	Sea ABCD un rectángulo. Sea P el punto medio de AB y sea Q el punto de intersección de DP y la perpendicular, a DP, trazada a partir de C. Muestra que el triángulo BCQ es isósceles.	Geometría
P6	Considera todos los números naturales <i>menores</i> de 1000000. ¿En cuántos de ellos <i>aparecen</i> las cuatro cifras de 2005, en <i>orden</i> , como parte de su <i>escritura</i> ?	Combinatoria

Para resolver el examen, a los 91 estudiantes se les dieron las siguientes indicaciones:

- El tiempo diario máximo de duración del examen será de 4.5 horas.
- Deberás escribir cada problema que resuelvas o intentes, en una hoja diferente.
- Cada hoja que uses deberá tener tu nombre completo y escuela de procedencia.
- En caso de cualquier duda referente al enunciado de alguno de estos problemas, deberás preguntarla por escrito.
- Tienes la primera hora para hacer preguntas.

La recolección de la información se hizo después de la selección de los escritos donde el concursante identificara la incógnita, los datos y la condición del problema y donde propusiera, además, una o varias estrategias de solución. Para esta selección no era relevante que los escritos contuvieran la solución completa.

Posteriormente, se llevó a cabo el análisis, cuyo procedimiento consistió en la descripción verbal de la estrategia, el cálculo de su frecuencia de uso y la observación de la incidencia de la estrategia en la rama de la matemática a la que pertenecía cada uno de los problemas planteados.

Para la valoración de los resultados, se desarrollaron la(s) estrategia(s) propuesta(s) por cada concursante. Se identificaron las etapas de solución hasta

llegar a la respuesta completa y se asignaron calificaciones a cada uno de los problemas, de acuerdo con la etapa de avance.

II. Resultados

De los 91 concursantes, 23 no conocían el tipo de problemas al que tendrían que enfrentarse y “mucho menos” sabían a qué rama de la matemática pertenecían.

Sin importar que llegasen o no a la solución del problema planteado, los concursantes expusieron por escrito sus resultados, fundamentando sus respuestas en hojas separadas, lo que permitió conformar una base de datos estructurada para el análisis de sus estrategias.

Se analizaron 546 escritos, resultado de la solución de 6 problemas por 91 estudiantes. De estos, sólo en 194 se observó la identificación de la incógnita, los datos y la condición del problema planteado (ver Tabla II).

Tabla II. Frecuencias encontradas en los 546 escritos que evidencian la identificación de la incógnita, los datos y la condición de los problemas planteados

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total
No identificó	57	52	60	74	64	45	352
Si identificó	34	39	31	17	27	46	194
						Total	546

De los 91 concursantes que identificaron la incógnita, los datos y la condición, 42 estudiantes propusieron estrategias que expusieron en 89 escritos (ver Tabla III).

Tabla III. Número de escritos donde se identificaron estrategias de solución a los problemas planteados

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total
Sin estrategia	15	14	19	13	17	27	105
Con estrategia	19	25	12	4	10	19	89
						Total	194

En cuanto a las estrategias, se identificaron las siguientes (Cabañas, 2000):

- **Ensayo y error:** Se toman números al azar y se va probando, hasta encontrar la solución.
- **Usar una variable:** Se utiliza cuando se desconoce un dato, apoyándose en la estrategia anterior.
- **Buscar un patrón:** Consiste en el análisis de un determinado modelo para ver si se observa una regularidad. Es un patrón, que casi siempre sugiere la solución del problema.

- **Hacer una lista:** Se relacionan todos los posibles resultados y el que cumpla con las exigencias planteadas en el problema, entonces se considera que se tiene la solución. Aquí se utiliza la comprobación para verificar la solución.
- **Resolver un problema más simple:** Se trata de resolver un problema descomponiendo el problema original en problemas sencillos, de tal manera que al integrarlo se llegue a la solución.
- **Hacer una figura:** Estrategia que consiste en modelar la situación mediante figuras que incluyen relaciones de lo que se conoce y lo que se busca.
- **Usar un razonamiento directo:** Es una estrategia cuyo razonamiento se basa en la lógica; su principio es la inducción.
- **Usar un razonamiento indirecto:** Estrategia cuyo razonamiento está basado en la lógica; su principio es la deducción.

A continuación, en la Tabla IV, se presenta la frecuencia de uso de las estrategias de solución detectadas en cada uno de los seis problemas planteados en el examen.

Tabla IV. Frecuencias de uso de las estrategias de solución detectadas en cada problema planteado en el examen

Tipo de estrategia	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total
Ensayo y error	0	5	0	0	0	0	5
Usar una variable	0	0	0	0	0	6	6
Buscar un patrón	2	0	0	0	0	0	2
Hacer una lista	6	4	0	2	0	0	12
Resolver un problema más simple	1	0	0	0	0	9	10
Hacer una figura	0	0	11	0	10	0	21
Usar un razonamiento directo	7	15	0	1	0	4	27
Usar un razonamiento indirecto	3	2	0	1	0	0	6
Número de estrategias propuestas	5	4	1	3	1	3	

La Tabla V presenta el número de escritos donde se identificaron estrategias en función de la rama de la matemática involucrada en el examen. Se puede observar que en la rama Combinatoria, los estudiantes propusieron el mayor número de vías de solución.

Tabla V. Número de escritos donde se identificaron estrategias en función de las ramas de la matemática involucradas en el examen

Tipo de estrategia	Combinatoria	Aritmética	Geometría
Ensayo y error	0	5	0
Usar una variable	6	0	0
Buscar un patrón	2	0	0
Hacer una lista	6	6	0
Resolver un problema más simple	10	0	0
Hacer una figura	0	0	21
Usar un razonamiento directo	11	16	0
Usar un razonamiento indirecto	3	3	0

La Tabla VI presenta el número de escritos que contienen solución completa en cada uno de los problemas planteados en el examen. Se puede observar que dentro de la rama Combinatoria se encontraron seis escritos, en Aritmética 13 y en Geometría, siete.

Tabla VI. Número de escritos que reportan solución completa en cada uno de los seis problemas planteados en el examen

Tipo de estrategia	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total
Ensayo y error	0	0	0	0	0	0	0
Usar una variable	0	0	0	0	0	0	0
Buscar un patrón	0	0	0	0	0	0	0
Hacer una lista	2	0	0	2	0	0	4
Resolver un problema más simple	0	0	0	0	0	0	0
Hacer una figura	0	0	2	0	5	0	7
Usar un razonamiento directo	3	7	0	2	0	0	12
Usar un razonamiento indirecto	1	1	0	1	0	0	3

III. Discusión y consideraciones

En el planteamiento de problemas, son aplicables de manera general, las preguntas ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición? (Pólya, 1981). Sin embargo, las respuestas correctas a estas preguntas trascienden el ámbito matemático e implican, por parte del estudiante, el dominio de la lectura y valoración crítica de textos, en particular lo que se refiere a la localización de información específica, hacer inferencias simples, captar relaciones entre componentes e identificar información implícita (Aguilar y Cepeda, 2004).

En esta investigación se encontró que únicamente 35 % de los escritos analizados cuentan con evidencias de que los concursantes comprendieron el problema correspondiente. Este resultado es congruente con lo reportado por el Programa de Indicadores de Evaluación Educativa, publicados por el Observatorio Ciudadano de la Educación el 4 de diciembre de 2000. En este programa participaron 28 países y México ocupó el penúltimo lugar en comprensión de textos (Aguilar y Cepeda, 2004).

De los 42 estudiantes que propusieron vías de solución, ocho habían recibido entrenamiento olímpico en años anteriores y generaron 37 de los 89 escritos donde se identificaron estrategias. Este dato resulta significativo porque representa 41% de los escritos con estrategia, lo que refleja la maduración del pensamiento formal en los estudiantes, logrado a través de los cursos de entrenamiento que año con año se realizan en la Benemérita Universidad de Puebla para la Olimpiada Nacional.

En cuanto a la relación entre el análisis de las estrategias generales y las ramas de la matemática involucradas en los problemas del examen, los resultados demuestran que para la Geometría se usó una sola estrategia general. En sus 21

escritos, los evaluadores observaron las siguientes etapas de avance: en 12 escritos hay reconocimiento de las figuras; hay tres escritos donde se evidencia el descubrimiento de las propiedades de las figuras, y en seis escritos se observa la solución completa. En Combinatoria y Aritmética no se observa el predominio de una estrategia general.

Las diferentes formas de resolver los seis problemas planteados en el examen se presentaron a los 27 estudiantes aceptados en el curso estatal de entrenamiento para la Olimpiada Nacional, realizado en la ciudad de Puebla del 15 de junio al 13 de septiembre de 2005. En las dos primeras sesiones se discutieron las ventajas y desventajas, lo que permitió evaluar de forma colectiva la eficiencia de las estrategias propuestas para cada uno de los seis problemas del examen de selección.

Los escritos del evaluador que incluyen el desarrollo de las estrategias propuestas por los concursantes y la identificación de las etapas de avance, hasta llegar a la solución completa, inauguran el banco de respuestas de los problemas de la Olimpiada Estatal de Matemáticas del Estado de Puebla, que se enriquecerá en la medida en que avance este proyecto de investigación.

Los nuevos objetivos del proyecto, es avanzar en el análisis de las variables del “proceso de resolución de problemas”, ya señalado, pues resulta importante investigar la evolución cognitiva del estudiante durante sus experiencias de aprendizaje (Santos Trigo, 2006). El alcance de los objetivos señalados en la tabla VII, aportará elementos que permitirán sistematizar los cursos de entrenamiento estatal para la Olimpiada Nacional, cuyos propósitos principales son preparar a los estudiantes para el concurso nacional y enriquecer al Sistema de Educación Superior del estado de Puebla con estudiantes interesados en cursar carreras científicas, con posibilidades reales de desarrollar de manera exitosa el razonamiento hipotético–deductivo.

Tabla VII. Objetivos propuestos que permitirán analizar las variables del proceso de resolución de problemas

Variable	Objetivos
La importancia de ideas conocidas, conocimientos de conceptos, de hechos específicos.	Lectura y análisis de los Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas editados por la Facultad de Ciencias de la UNAM: Geometría, ejercicios y problemas. Desigualdades. Geometría. Combinatoria. Teoría de Números. Principio de Olimpiada.
El repertorio de estrategias generales y específicas que son capaces de poner en marcha al sujeto en el camino de la resolución de problemas concretos.	Análisis de las estrategias de solución a los problemas del examen de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas del Estado de Puebla, México, realizados en 2006 y 2007.
El papel del monitoreo o autoevaluación del procedimiento utilizado al revolver un problema.	Entrevistas a los concursantes del examen de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas del Estado de Puebla en 2008, tomando como base la propuesta de hoja de captura de información propuesta por Luz Manuel Santos Trigo (1997, pp. 110-113).

Referencias

- Aguilar, M. A. y Cepeda Hinojosa, B. (Coords.). (2004). *Preguntas y sentido de las respuestas en las pruebas nacionales*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- Alarcón, J., Arriaga, A., Bonilla, H. y Rosas, R. (1994). *Secuencia y Organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Cabañas Sánchez, M. G. (2000). *Los problemas... ¿Cómo enseño a resolverlos?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Davis, R. B. (1986). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. New York: Ablex.
- Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
- Rich, E. (1983). *Artificial intelligence*. New York: McGraw-Hill.
- Santos Trigo, L. M. (2006). Aportaciones de la investigación en Educación Matemática a la Instrucción. *Números* 63, 25-40.

Santos Trigo, L. M. (1996). Consideraciones metodológicas en la investigación en educación matemática. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 28 (3), 533-546.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.